# STATIQUE DES FLUIDES

## I. Qu'est-ce qu'un fluide ?

Contrairement aux solides, les liquides et les gaz sont **déformables** (« ils n'ont pas de forme propre »).

**L'état fluide regroupe l'état gazeux et l'état liquide.**

Un **liquide** est un fluide **dense et quasi-incompressible** (« il possède un volume propre »).
Un **gaz** est un fluide **peu dense et compressible** qui tend à occuper tout l'espace qui lui est offert (« il n'a pas de volume propre »).

Voici quelques ordres de grandeurs dans les conditions usuelles (P=1bar et T=25°C)

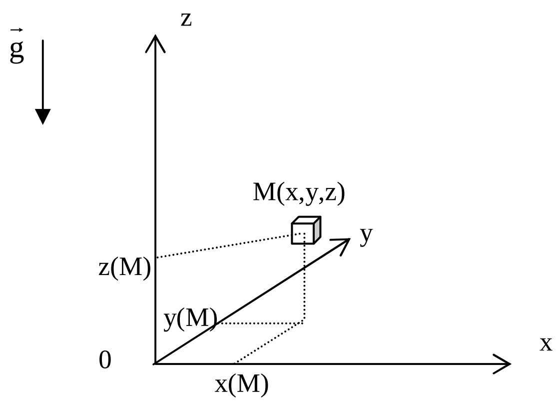
| Fluide - Etat | $n^* \quad (en\, m^{-3})$ | $\rho \quad (en\, kg.m^{-3})$ | $\chi_T$ (en $Pa^{-1}$) |
|---|---|---|---|
| Eau - liquide | $10^{28}$ | $10^3$ | $10^{-10}$ |
| Eau - gaz | $10^{25}$ | $1$ | $10^{-5}$ |
| ***Comparaison*** | $\boldsymbol{n^*_{liquide} \sim 10^3 n^*_{gaz}}$ | $\boldsymbol{\rho_{liquide} \sim 10^3 \rho_{gaz}}$ | $\boldsymbol{\chi_{Tgaz} \sim 10^5 \chi_{Tliquide}}$ |

---

## II. Relation fondamentale de la statique des fluides

Le **fluide étudié**, liquide ou gaz, est **au repos** (on dit aussi **en équilibre**) dans **le référentiel terrestre supposé galiléen** associé au repère R($O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$). Le **champ de pesanteur** $\vec{g} = -g\vec{e}_z$ **est supposé uniforme.**

**Localement**, on choisit au sein du fluide un **volume mésoscopique $\boldsymbol{d\tau}$** (appelé **particule de fluide**), petit à l'échelle macroscopique mais grand à l'échelle microscopique (de forme cubique pour simplifier l'étude), centré autour d'un point matériel M(x, y, z) (centre d'inertie de cube).




On applique le **principe fondamental de la dynamique (PFD) à la particule de fluide de volume** $d\tau$ **et de masse dm dans R** : $dm\vec{a}(M) = \vec{R}_{ext}$.
$\vec{R}_{ext}$ représente la résultante des forces extérieures s'exerçant sur la particule de fluide. Il s'agit :

- des **forces pressantes** exercées par le reste du fluide sur la surface délimitant la particule de fluide (6 faces du cube de surface respective dS) notées $\boldsymbol{d\vec{F}_P = dF_{Px}\vec{e}_x + dF_{Py}\vec{e}_y + dF_{Pz}\vec{e}_z}$.
- du **poids de la particule de fluide** qui vérifie $\boldsymbol{dm\vec{g} = \rho(M)d\tau\vec{g}}$ où $\rho$ est une grandeur définie localement ($\rho$ peut varier au sein du fluide).

Comme la **particule de fluide est en équilibre dans R** (fluide au repos) alors $\boldsymbol{\vec{a}(M) = \vec{0}}$ . D'après le PFD il vient : $\boldsymbol{d\vec{F}_P + \rho(M)d\tau\vec{g} = \vec{0}}$.

- <u>En projetant le PFD suivant $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_y$</u> il vient : $\boldsymbol{dF_{Px} = dF_{Py} = 0}$.

Les forces pressantes exercées sur les faces à x et à y constants se compensent deux à deux :

$$P\left(x-\frac{dx}{2},y,z\right)=P\left(x+\frac{dx}{2},y,z\right)\ et\ P\left(x,y-\frac{dy}{2},z\right)=\ P\left(x,y+\frac{dy}{2},z\right)$$

Par conséquent **la pression ne dépend que de la variable z** : $\boldsymbol{P(x,y,z)=P(z)}$.

Ainsi $d\vec{F}_P = dF_{Pz}\vec{e}_z = \left[P\left(z-\frac{dz}{2}\right)-P\left(z+\frac{dz}{2}\right)\right]dS\vec{e}_z$ avec $dS = dxdy$.

$\left[P\left(z+\frac{dz}{2}\right)-P\left(z-\frac{dz}{2}\right)\right]$ représente une faible variation de pression lorsque z varie de dz (variation élémentaire d'altitude) qu'on peut assimiler à dP.

- <u>En projetant le PFD suivant $\vec{e}_z$</u> il vient : $\boldsymbol{-dPdS-\rho(M)d\tau g=0}$ soit $\boldsymbol{dP=-\rho(M)gdz}$ (car $d\tau = dxdydz\ \ et\ dS = dxdy$).

On obtient **la relation fondamentale de la statique des fluides avec <u>Oz axe vertical ascendant</u> (RFSF)** :

$$\boldsymbol{\frac{dP}{dz}=-\rho g}$$

*<u>Remarques</u>* :

- La pression P et la masse volumique ρ sont des grandeurs locales qui sont susceptibles de varier au sein du fluide.
- **La pression diminuant avec l'altitude**, si on choisit **Oz descendant**, la relation précédente s'écrit :

$$\boldsymbol{\frac{dP}{dz}=+\rho g}$$

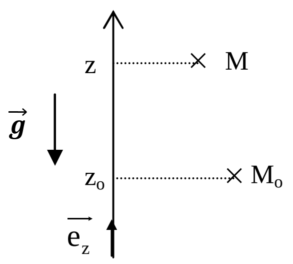
---

# <u>III. Fluide incompressible et homogène</u>

Un fluide homogène et incompressible a une masse volumique uniforme (homogène) indépendante de la pression (incompressible) soit $\boxed{\boldsymbol{\rho = cste}}$

Les **liquides** sont un bon exemple de tels fluides.

## 1) Variation de la pression avec l'altitude




On intègre la relation fondamentale de la statique des fluides $\boldsymbol{\frac{dP}{dz}=-\rho g}$ avec **$\boldsymbol{\rho}$ et g constants** entre les altitudes z et $z_o$ :

$$\boxed{\boldsymbol{P(z)-P(z_0)=-\rho g(z-z_0)}}$$

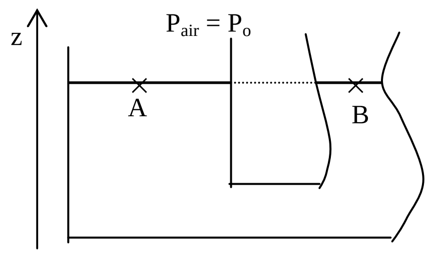
**La pression diminue avec l'altitude (ou augmente avec la profondeur).**

<u>Question</u> : Quel surpression ressent un plongeur quand il descend à 10m de profondeur ?

Données : $\rho_{eau\ liquide} = 10^3 kg.m^{-3}$ ; $g = 9{,}8 m.s^{-2}$

## 2) Applications

- ***Principe des vases communicants***

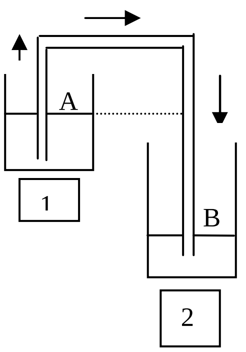



**Continuité de la pression à la traversée de la surface de séparation air - liquide** : $P_A = P_o = P_B$

D'après la relation fondamentale de la statique des fluides : $z_A = z_B$
**Les surfaces libres du liquide en équilibre sont dans le même plan horizontal.**

Exemples : * Ecluse

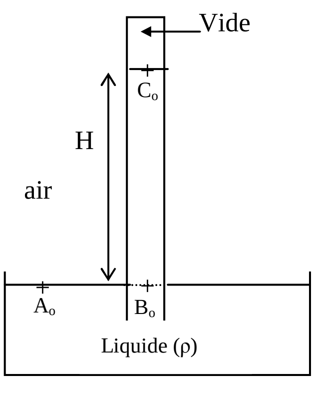
* Siphon




Après une phase d'amorçage, le liquide passe du récipient 1 vers le récipient 2 de manière à ce que la dénivellation entre les deux surfaces libres du liquide s'annule, ce qui n'arrivera pas avant que le récipient 1 soit vide.

- ***Mesure de pression : manomètres***

Manomètres barométriques (mesure **absolue** de pression)



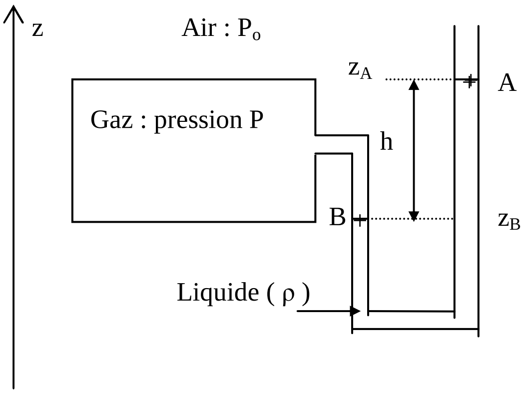

Continuité de la pression à la traversée de la surface de séparation air-liquide et vide - liquide : $P_{Ao} = P_o$ et $P_{Co} = 0$ (1)

RFSF appliquée dans le liquide de masse volumique ρ :
$P_{Ao} - P_{Bo} = 0$ car $z_{Ao} = z_{Bo}$ (2)
$P_{Bo} – P_{Co} = \rho.g.H$ (3)

(1), (2) et (3) conduisent à $\mathbf{P_o = \rho.g.H}$

L'expérience à été réalisée la première fois par Torricelli en 1643. Le liquide utilisé était du mercure ($\rho = 13{,}6.10^3$ kg.m$^{-3}$). Pour une pression de 1,013 Pa = 1 atmosphère, la hauteur H est égale à 76 cm de mercure. Avec comme liquide de l'eau $H' \approx 13{,}6.H$ .....

Manomètres à air libre (mesure **relative** de pression)




Continuité de la pression à la traversée des surfaces de séparation gaz – liquide :
$P_B = P$ pression du gaz
$P_A = P_o$ pression extérieure (pression de l'air)

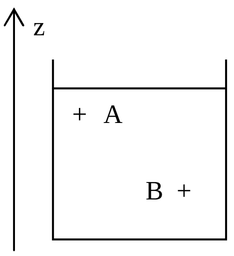
RFSF appliquée dans le liquide de masse volumique ρ :

$$\mathbf{P_B - P_A = P - P_o =} \rho.g(z_A - z_B)$$

Soit $h = |z_A - z_B|$ la dénivellation entre les deux surfaces libres du liquide.
Si $P > P_o$ (surpression) : $P = P_o + \rho.g.h$ ($z_A > z_B$ cas de figure)
Si $P < P_o$ (dépression) : $P = P_o - \rho.g.h$ ($z_A < z_B$)

Dans le cas où les pressions sont du même ordre de grandeur, on choisit un liquide de faible masse volumique pour augmenter la sensibilité de la mesure.

- ***Théorème de Pascal***




Ce théorème se déduit directement de la relation fondamentale de la statique des fluides incompressibles : $P_A - P_B = -\rho.g(z_A - z_B)$
Si la pression en A varie de ΔP, alors quel que soit B, la pression en B varie également de ΔP.
**Théorème de Pascal** : **Toute variation de pression en un point du liquide est intégralement transmise en tout autre point.**

Exemple : presse hydraulique

---

# IV. Fluide compressible : cas de l'atmosphère isotherme

## 1) Modèle utilisé pour l'atmosphère

- **Modèle du gaz parfait** : l'air (constitué en première approximation de 80% de $N_2$ et 20% de $O_2$) est assimilé à un gaz parfait de masse molaire $M_a = 29\ g.mol^{-1}$.

Sa masse volumique s'exprime donc par : $\boxed{\rho = \frac{m}{V} = \frac{n.M_a}{V} = \frac{M_a.P}{R.T}}$ car PV=nRT.

- **Atmosphère isotherme** : La température T est supposée uniforme **$T = T_o$ =cste**
- **Champ de pesanteur uniforme** : $g \approx G\frac{M_T}{(R_T + z)^2} \approx g_o = G\frac{M_T}{R_T^{\ 2}}$ $z \ll R_T$ ($R_T = 6400$ km)

  On prendra **Oz vertical ascendant** : $\vec{g} = -g\vec{e}_z$.

## 2) Variation de la pression et de la masse volumique avec l'altitude

La relation fondamentale de la statique des fluides établie au début du chapitre $\frac{dP}{dz} = -\rho g$ devient en remplaçant $\rho$ par l'expression obtenue à l'aide de l'équation d'état des gaz parfaits : $\frac{dP}{dz} = -\frac{M_a g}{RT_0}P$ où $\frac{M_a g}{RT_0} = constante$ d'après le modèle de l'atmosphère présenté ci-dessus.

En séparant les variables il vient : $\frac{dP}{P} = -\frac{M_a g}{RT_0}dz$ .

En intégrant entre les altitudes z=0 (niveau du sol) où P(z=0)=$P_0$ et une altitude quelconque z on obtient :

$$\boxed{\boldsymbol{ln\left(\frac{P(z)}{P_0}\right) = -\frac{M_a g}{RT_0}z} \quad \text{que l'on peut aussi écrire} \quad \boldsymbol{P(z) = P_0 e^{-\frac{M_a g}{RT_0}z}}}$$

A l'aide de l'équation d'état des gaz parfaits on obtient pour la masse volumique : $\boxed{\boldsymbol{\rho(z) = \rho_0 e^{-\frac{M_a g}{RT_0}z}}}$

**La pression et la masse volumique de l'atmosphère isotherme décroissent de manière exponentielle avec l'altitude.**

## 3) Hauteur caractéristique H

Le terme constant $\frac{RT_0}{M_a g}$ est homogène à une longueur appelée **hauteur caractéristique de l'atmosphère isotherme** et notée $\boldsymbol{H} = \frac{RT_0}{M_a g}$ d'où $\boxed{\boldsymbol{P(z) = P_0 e^{-\frac{z}{H}}}}$

***Application*** :
Pour l'air à $T_0$ =20°C=293K (g = 9,8 m.s$^{-2}$ ; R = 8,314 J.mol$^{-1}$.K$^{-1}$ ), on trouve H= 8,6km.
**On admet la pression comme uniforme si sa variation relative n'excède pas 1%** soit $\frac{\Delta P}{P_0} = \frac{P_0 - P(z)}{P_0} < 0{,}01$ soit $\frac{P(z)}{P_0} > 0{,}99$.
D'après l'expression précédente il vient : $e^{-\frac{z}{H}} > 0{,}99$ soit $z < -Hln(0{,}99)$ d'où $\boldsymbol{z} < \frac{\boldsymbol{H}}{\boldsymbol{100}} = 86m$.
**Pour des altitudes ou des dénivellations petites devant H, la pression et la masse volumique d'un gaz sont uniformes à température constante.**

## 4) Interprétation statistique

On cherche à déterminer la répartition moléculaire en fonction de l'altitude caractérisée par la densité particulaire $n^* = \frac{N}{V}$ avec N le nombre de molécules gazeuses contenues dans le volume V.
D'après l'équation des gaz parfaits : $PV = nRT$ soit $PV = \frac{N}{N_A}RT$ d'où $P = \frac{N}{V}k_B T$ $(R = N_A k_B)$.
En résumé : $\boxed{\boldsymbol{P = n^* k_B T_0}}$ (modèle de l'atmosphère présenté au §1).

**Ainsi de la même façon que la pression et la masse volumique, la densité particulaire dépend de l'altitude et vérifie** : $\boxed{\boldsymbol{n^*(z) = n_0^* e^{-\frac{M_a g}{RT_0}z}}}$

- *Exprimons $\frac{M_a g}{RT_0}$ pour <u>une molécule gazeuse</u> :*

$M_a = N_A.m$ où m est **la masse d'une molécule**. Ainsi $\frac{M_a g}{RT_0} = \frac{N_A m g}{RT_0} = \frac{mg}{k_B T_0}$ $(R = N_A k_B)$. Par conséquent :
$\boxed{\boldsymbol{n^*(z) = n_0^* e^{-\frac{mgz}{k_B T_0}}}}$ où - $mgz$ s'identifie à **l'énergie potentielle de pesanteur** d'une molécule notée $E_{pm}(z)$.
- $k_B T_0$ correspond à une **énergie d'agitation thermique.**

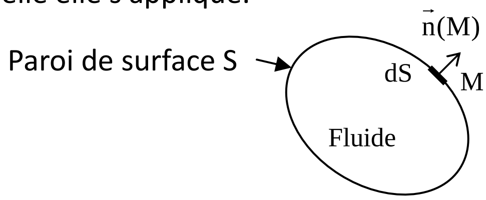
**La répartition moléculaire $\boldsymbol{n^*(z) = n_0^* e^{-\frac{E_{pm}(z)}{k_B T_0}}}$ dépend de la compétition entre la pesanteur ($\boldsymbol{E_{pm}(z)}$) et l'agitation thermique ($\boldsymbol{k_B T_0}$)** :

- Si $\boldsymbol{k_B T_0 \gg E_{pm}(z)}$ alors tous les niveaux d'énergie (à z constant) sont également peuplés (absence de sélectivité) : $\boldsymbol{n^*(z) \sim n_0^*}$ répartition moléculaire **uniforme**.
- Si $\boldsymbol{k_B T_0 \ll E_{pm}(z)}$ alors seul le niveau le plus bas est occupé (sélectivité totale) : $\boldsymbol{n^*(z \neq 0) \sim 0}$.
- Si $\boldsymbol{k_B T_0}$ est quelconque alors les niveaux sont d'autant plus peuplés qu'ils sont bas en énergie : l'air se raréfie en altitude.

# V. Poussée d'Archimède

## 1) Calcul direct des forces pressantes

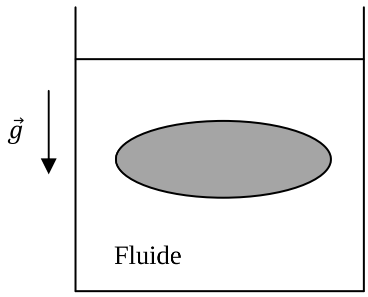
La **pression est une grandeur scalaire**, la force **pressante est une grandeur vectorielle** normale en chaque point à la surface sur laquelle elle s'applique.




- Force élémentaire exercée par le fluide sur l'élément de paroi dS : $\overrightarrow{\mathbf{dF_p}} = \mathbf{P(M)}\vec{\boldsymbol{n}}\mathbf{(M)}\boldsymbol{dS}$
- Force exercée par le fluide sur la paroi S : $\vec{\mathbf{F}}_\mathbf{p} = \iint_\mathbf{S} \overrightarrow{\mathbf{dF_p}} = \iint_\mathbf{S} \mathbf{P(M)}\vec{\boldsymbol{n}}\mathbf{(M)}\boldsymbol{dS}$

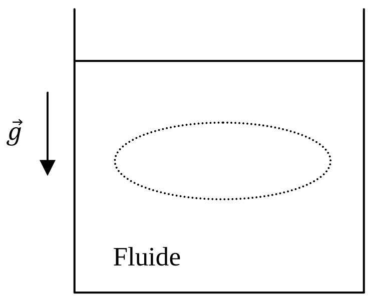
## 2) Théorème d'Archimède

A l'exception de géométries simples, le calcul des forces pressantes est souvent complexe.
Le théorème d'Archimède permet d'exprimer rapidement les forces pressantes exercées par un fluide ou un ensemble de fluides au repos sur un **corps totalement immergé** dans ceux-ci.




Soit un objet **en équilibre** dans le référentiel terrestre, de forme quelconque, de volume V, de masse $m_0$, totalement immergé dans un fluide.
Le principe fondamental de la dynamique appliqué à l'objet dans le référentiel terrestre supposé galiléen s'écrit $m_0\vec{g} + \vec{\mathrm{F}}_\mathrm{p} = \vec{0}$ où :

- $m_0\vec{g}$ représente le poids de l'objet.
- $\vec{\mathrm{F}}_\mathrm{p}$ correspond à la résultante des forces pressantes du fluide s'exerçant sur la surface de l'objet. Cette résultante est appelée **poussée d'Archimède** : $\vec{\Pi}_\mathbf{A} = \vec{\mathbf{F}}_\mathbf{p}$**.**




Remplaçons (par la pensée) l'objet par du fluide identique à celui dans lequel il est immergé.
Le principe fondamental de la dynamique appliqué à ce fluide en équilibre dans le référentiel terrestre supposé galiléen s'écrit $m_f\vec{g} + \vec{\Pi}_\mathbf{A} = \vec{0}$ où :

- $m_f\vec{g}$ représente le poids du fluide déplacé par l'objet.
- $\vec{\Pi}_\mathbf{A}$ correspond à la poussée d'Archimède présentée précédemment.

*<u>Remarque</u>* : Nous supposons implicitement que le champ de pression dans le fluide est le même pour les 2 problèmes. En effet, on a établi précédemment que pour un fluide au repos, la pression ne dépend que de l'altitude. Ainsi la présence ou non de l'objet ne changeant pas l'altitude, les forces pressantes seront les mêmes.

**Théorème d'Archimède** :

**La résultante des forces de pression, appelée poussée d'Archimède, exercée sur un corps totalement immergé dans un ou plusieurs fluides au repos dans le référentiel terrestre, est égale à l'opposé du poids du fluide déplacé :** $\boxed{\vec{\Pi}_\mathbf{A} = -\boldsymbol{m_f}\vec{\boldsymbol{g}}}$

Remarque : Ce théorème est valable pour un corps en mouvement lent par rapport au fluide.

### 3) Applications

- ***Ballon ascensionnel***

On considère un ballon contenant un gaz moins dense que l'air atmosphérique ($\rho_{gaz} < \rho_{air}$) en ascension dans l'atmosphère. *Exemples* : Ballon-sonde (hélium), Montgolfière (air chaud).

Le principe fondamental de la dynamique appliqué au ballon de masse m (enveloppe, gaz, nacelle) dans le référentiel terrestre supposé galiléen s'écrit : $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{\Pi}_{\mathbf{A}} = (m - m_{air})\vec{g}$ où $m_{air}$ représente la masse d'air déplacée par le ballon.
En projetant suivant la verticale ascendante : $ma_z = (m_{air} - m)g$.
L'ascension a lieu à la condition : $a_z > 0 \ \ soit \ \ m < m_{air}$.

---

- ***Iceberg***

On souhaite déterminer la proportion entre les volumes émergé et immergé d'un iceberg, supposé homogène, de masse m.

On note :
- $V_i$ son volume immergé ;
- $V_e$ son volume émergé ;
- $\rho_l$ la masse volumique de l'eau liquide : $\rho_l = 10^3 kg.m^{-3}$;
- $\rho_g$ la masse volumique de l'eau solide (glace) : $\rho_g = 0{,}9.10^3 kg.m^{-3}$;
- $\rho_a$ la masse volumique de l'air : $\rho_a = 1{,}3 kg.m^{-3}$.

Les forces subies par l'iceberg sont :
- son poids : $m\vec{g} = \rho_g(V_i + V_e)\vec{g}$
- la poussée d'Archimède due :
  - à l'eau : $-\rho_l V_i \vec{g}$
  - à l'air : $-\rho_a V_e \vec{g}$

Le principe fondamental de la dynamique (PFD) appliqué à l'iceberg en équilibre dans le référentiel terrestre supposé galiléen s'écrit : $\vec{0} = \rho_g(V_i + V_e)\vec{g} + -\rho_l V_i \vec{g} + -\rho_a V_e \vec{g}$.
Comme $\rho_g \gg \rho_a$ alors $\|\rho_g V_e \vec{g}\| \gg \|\rho_a V_e \vec{g}\|$ et on néglige la poussée d'Archimède due à l'air.
Le PFD projeté suivant la verticale devient : $\boldsymbol{\rho_g(V_i + V_e) = \rho_l V_i}$ d'où $\frac{V_i}{V_i + V_e} = \frac{\rho_g}{\rho_l}$ soit $\boldsymbol{\frac{V_i}{V_{iceberg}} = 0{,}9}$.
**Par conséquent seul 10% du volume de l'iceberg se situe hors de l'eau !**